数理解析研究所講究録
132巻 1971年 63-77

x のベキの大きさで零に近づく解

東京都立大学
岩野 正宏

1. 不確定型特異点をもつ連立方程式

連立方程式

(A) $x^{\sigma+1} y' = f(x, y, z), \qquad x z' = g(x, y, z)$

において, σ は正の整数; x は複素独立変数; y と z とはともに スカラー; $f(x,y,z)$, $g(x,y,z)$ は

$$|x| \leq \xi, \quad |y| \leq d, \quad |z| \leq d$$

において (x, y, z) の正則関数であり, しかも $f(0,0,0)=0$, $g(0,0,0)=0$.

さらに

仮定 I

$$\nu \equiv f_y(0,0,0) \neq 0$$

を仮定すれば, 簡単な変換を行うことにより,

$$f_x(0,0,0)=0, \; f_z(0,0,0)=0, \; g_y(0,0,0)=0$$

が成り立つと仮定して一般性を失わない．さいごに

仮定 II

$$\mu \equiv g_z(0,0,0) \text{ の実部は 正．}$$

を仮定する．

形式変換に関する福原の理論（方法）を応用すれば，方程式 (A) は

$$(\mathrm{F}) \quad y \sim \sum_q \Phi(x)^q A_q(x), \quad z \sim \sum_q \Phi(x)^q B_q(x)$$

の形の形式解をもつことが証明できる。ここで $A_q(x)$, $B_q(x)$ は x のベキ級数；$\Phi(x)$ は reduced equation

$$x v' = \mu v + c x^{\mu}$$

の一般解，したがって，C を任意定数として，$\Phi(x)$ の形は

$$\Phi(x) = C x^{\mu} \quad (c=0); \qquad \Phi(x) = x^{\mu}(C + c \log x) \ (c \neq 0).$$

$c \neq 0$ のときは，μ は正の整数であることが知られている．

著者は，(F) の係数 $A_q(x)$, $B_q(x)$ が x の解析関数であるようにすでに定められているものと仮定して，形式解 (F) は収束であることを，Funkcialaj Ekvacioj 12 (1969) 251–168 に証明した。実は この結果は，$c \neq 0$ の場合には少し修正しなければならないことが

わかった。

まず定理を述べる。

$\boxed{\text{定理}}$ $\underline{\Theta}$, $\overline{\Theta}$ は

$$\underline{\Theta}=\frac{1}{\sigma}\left(\arg\nu-\frac{5\pi}{2}\right)+\varepsilon,\quad \overline{\Theta}=\frac{1}{\sigma}\left(\arg\nu+\frac{\pi}{2}\right)-\varepsilon,$$

または

$$\underline{\Theta}=\frac{1}{\sigma}\left(\arg\nu-\frac{\pi}{2}\right)+\varepsilon,\quad \overline{\Theta}=\frac{1}{\sigma}\left(\arg\nu+\frac{5\pi}{2}\right)-\varepsilon$$

のどちらか一方を表わす。ε は十分小さい正の数

領域

(D) $\quad 0<|x|<\xi'',\quad \underline{\Theta}<\arg x<\overline{\Theta},\quad |v|<b''$

において定義された関数 $Y(x,v)$, $Z(x,v)$ が存在し、次の条件を満足する：

i) $Y(x,v)$, $Z(x,v)$ は (x,v) の関数として (D) において正則.

ii) 一様収束な展開式

$$Y(x,v)=\sum_{g=0}^{\infty}v^g\,\overline{Y}_g(x),\quad Z(x,v)=\sum_{g=0}^{\infty}v^g\,\overline{Z}_g(x)$$

が成り立ち、係数は角領域

$$\underline{\Theta}<\arg x<\overline{\Theta},\quad 0<|x|<\xi''$$

において正則、しかもこの角領域のなかから $x\to 0$

のとき，x のベキ級数

$$\bar{Y}_q(x) \simeq A_q(x), \qquad \bar{Z}_q(x) \simeq B_q(x)$$

に漸近展開される．($A_q(x)$, $B_q(x)$ は (F) に現れたものと同じもの)。

iii) $(x, \Phi(x))$ が 領域 (D) のなかにある限り，すなわち，不等式

$$0<|x|<\delta'', \quad \underline{\Theta}<\arg x<\overline{\Theta}, \quad |\Phi(x)|<b''$$

を満足する限り，

$$y = Y(x, \Phi(x)), \quad z = Z(x, \Phi(x))$$

は方程式 (A) の 真の解 である。

この 定理 の証明の概略を つぎに述べる

2\. $c=0$ の場合． 定理の証明は前記の論文のままでよい。

形式解(F)を，方程式(A)の(y, z)の代わりに，置き換えれば $\{A_q\ B_q\}$ は 次の形の微分方程式を満足することがわかる: すなわち，$\Phi(x)$ の $0, 1, \ldots, q$ 次の項の係数 は等しい とおけば，

$$x^{\sigma+1} A_0' = f(x, A_0, B_0), \quad x B_0' = g(x, A_0, B_0),$$

$$\begin{cases} x^{\sigma+1} A_q' = (J(x) - q\mu x^{\sigma}) A_q + K(x) B_q + P_q(x), \\ x B_q' = L(x) A_q + (M(x) - q\mu) B_q + Q_q(x), \end{cases}$$

$$J(x) \equiv f_y(x, A_0(x), B_0(x)), \quad K(x) \equiv f_z(x, A_0(x), B_0(x)),$$

$$L(x) \equiv g_y(x, A_0(x), B_0(x)), \quad M(x) \equiv g_z(x, A_0(x), B_0(x))$$

$P_q(x)$, $Q_q(x)$ は $A_1(x), \ldots, A_{q-1}(x)$, $B_1(x), \ldots, B_{q-1}(x)$ およびこれらの導関数の多項式で，係数は $(A_0(x), B_0(x), x)$ の 3 変数の関数として $(0, 0, 0)$ の近傍において一価正則な関数である。したがって，逐次に $\{A_q(x), B_q(x)\}$ を，$q = 0, 1, \ldots$ の順に決めていけば，$P_q(x)$, $Q_q(x)$ はともに既知関数と考えられる。さらに，これらの微分方程式は，形式解

$$(2.1)_q \quad A_q \sim \sum_{l=0}^{\infty} P_{lq} x^l, \quad B_q \sim \sum_{l=0}^{\infty} Q_{lq} x^l$$

をもつこと，および $f_y(0, 0, 0) \neq 0$ に注意すれば，第 1 の方程式に存在定理を応用することによって，

領域

(2.2) $\underline{\Theta} < \arg x < \overline{\Theta}, \quad 0 < |x| < \xi'$

において一価正則 かつ べキ級数 $(2.1)_0$ に漸近展開可能な解が ただ一つ存在する。これを $\{A_0(x), B_0(x)\}$ で表わす。また $f(0,0,0) = g(0,0,0) = 0$ を仮定しているから、

$$P_{00} = 0, \quad Q_{00} = 0$$

である。したがって

$$\lim_{x \to 0} A_0(x) = 0, \quad \lim_{x \to 0} B_0(x) = 0.$$

ゆえに

$$\lim_{x \to 0} J(x) \neq 0, \quad \lim_{x \to 0} K(x) = 0.$$

ふたたび 存在定理を 応用すれば、次の結論を得る:

(F) の形の形式解において、係数 $\{A_\xi(x), B_\xi(x)\}$ は 非特異型 $(\xi = 0)$ または 線型 $(\xi \neq 0)$ 方程式の解として 逐次に しかも 一意的に定められる。このとき 各係数は 角領域 (2.2) において 一価正則 しかも このなかから $x \to 0$ のとき 形式級数 $(2.1)_\xi$ に漸近展開可能である（そのような解がただ一つ存在するとき、

漸近展開は　一意的　であるという).

形式解(F) の収束の証明は, 前記の 論文に展開された通りにできる。 $\overline{Y}_\xi(x)=A_\xi(x)$, $\overline{Z}_\xi(x)=B_\xi(x)$ とおけばよい。

3. $c\neq 0$ の場合. まえと同じ方法を応用してみる。
$c\neq 0$ であるから,

$$x\Phi'(x)=\mu\Phi(x)+cx^{\mu}$$

となることを 注意する. (F)を (A) に代入して, $\Phi(x)$ の 0 次の項, すなわち $\Phi(x)$ に無関係な項 の係数 は等しい とおくことにより, 連立方程式

$$\begin{cases} x^{\sigma+1}A_0'=f(x,A_0,B_0)-cx^{\mu+\sigma}A_1, \\ xB_0'=g(x,A_0,B_0)-cx^{\mu}B_1 \end{cases}$$

を得る。この連立方程式は, 係数 $\{A_0(x), B_0(x)\}$ を決めることを 期待されているが, 方程式の右辺に もう一組の未知数 $\{A_1, B_1\}$ を含んでいる。同じような不都合は, $\{A_1(x), B_1(x)\}$ を定義することを期待される方程式において, あらたに一組の未知数 $\{A_2, B_2\}$ が含まれているという理由から 生ずる 以下同様. したがって (F)の形の

形式級数を考えても，その各係数はただ形式的な意味しかもたないから，級数(F)自身の解析的意味を調べることはできない！

そこで(F)の代わりに，(F)を x のベキ級数に形式的に並べかえて得られる新しい形式解

$$(F')\quad y\sim\sum_{l=0}^{\infty}x^{l}a_{l}(\Phi(x)),\quad z\sim\sum_{l=0}^{\infty}x^{l}b_{l}(\Phi(x))$$

を考える．$(2.1)_q$ を考慮すれば，$a_l(v)$, $b_l(v)$ は

$$(3.1)_l\quad a_l(v)\sim\sum_{q=0}^{\infty}P_{lq}v^{q},\quad b_l(v)\sim\sum_{q=0}^{\infty}Q_{lq}v^{q}$$

の形の形式ベキ級数であらわされる．

方程式(A)の $\{y, z\}$ の代りに (F') の右辺を代入する．$x^0, x^1, \ldots, x^l, \ldots$ の項の係数をそれぞれ等しいとおけば次の形の方程式を得る：

$$f(0, a_0, b_0)=0,\quad \mu v\frac{db_0}{dv}=g(0, a_0, b_0),$$

$$\begin{cases} E(v)a_l+F(v)b_l=S_l(v), \\ \mu v\dfrac{db_l}{dv}=G(v)a_l+(H(v)-l)b_l+T_l(v), \end{cases}$$

$$E(v)=f_y(0,a_0(v),b_0(v)),\quad F(v)=f_z(0,a_0(v),b_0(v)),$$

$$G(v)=g_y(0,a_0(v),b_0(v)),\quad H(v)=g_z(0,a_0(v),b_0(v)),$$

$S_\ell(v)$, $T_\ell(v)$ は $a_1(v),\ldots,a_{\ell-1}(v)$, $b_1(v),\ldots,b_{\ell-1}(v)$ および これらの導関数の 多項式で, 各係数は $(a_0(v), b_0(v), v)$ の 3変数の関数として $(0,0,0)$ の近傍で一価正則 である。上記の方程式 は すべて 形式解として $(3,1)_\ell$ の形の v のベキ級数 であらわされるものをもっている ことを 注意しておく.

$f_y(0,0,0)\neq 0$, $f_z(0,0,0)=0$ であると仮定されてあるから, 第1の微分方程式の はじめの式から. a_0 を解いて

$$a_0=U(b_0),\qquad U(0)=0.$$

ここで $U(b_0)$ は $b_0=0$ において一価正則. あとの式の a_0 の代りに $U(b_0)$ を代入して,

$$\mu v\frac{db_0}{dv}=g(0,U(b_0),b_0)=\hat{g}(b_0),\quad \hat{g}(0)=0$$

を得る。 $\hat{g}(b_0)$ は $b_0=0$ の近傍で一価正則. 形式解として v のベキ級数の形のものをもつから, Briot-Bouquet 理論 から, この形式級数 は 0 でない収束半径をも

ち その和 $b_0(v)$ は $v=0$ の近傍で一価正則な解となる。
$a_0(v) \equiv \overline{U}(b_0(v))$ もまた $v=0$ で一価正則。かくして，第1の方程式は $v=0$ の近傍 $|v|<b'$ において一価正則な解 $\{a_0(v),\ b_0(v)\}$ をもつ。 $\hat{g}(0)=0$, $\overline{U}(0)=0$ より， $a_0(0)=0$, $b_0(0)=0$.

$f_y(0,0,0) \neq 0$ より， $E(v)$ および $E(v)^{-1}$ はともに $|v|<b'$ において一価正則であると仮定しても一般性を失わない。同じような議論を，第2，…以下の方程式に応用すれば，次の結果を得る：

(F′) の形の形式解を考えると，係数 $\{a_\ell(v),\ b_\ell(v)\}$ は非線型 $(\ell=0)$ または線型 $(\ell \neq 0)$ 方程式の解として，逐次に， $v=0$ の近傍 $|v|<b'$ において一価正則な関数であるように定められる。

(F′) は形式解として意味をもつから，(F′) 自身の解析的な意味を調べることができる。前記の論文において，形式解

$$y \sim \sum_{q=0}^{\infty} \Phi(x)^q A_q(x), \qquad z \sim \sum_{q=0}^{\infty} \Phi(x)^q B_q(x)$$

の代りに，形式解

$$y \sim \sum_{\ell=0}^{\infty} x^\ell a_\ell(\Phi(x)), \quad z \sim \sum_{\ell=0}^{\infty} x^\ell b_\ell(\Phi(x))$$

を考え，全く同じ推論を行う．次の定理を証明することができる．

<u>領域 (D) において一価正則な関数</u> $Y(x,v)$, $Z(x,v)$ <u>が存在し，次の性質をもつ．</u>

α) $Y(x,v)$, $Z(x,v)$ <u>は</u> $x \to 0$, $\underline{\Theta} < \arg x < \overline{\Theta}$ <u>のとき，一様に漸近展開</u>

$$Y(x,v) \sim \sum_{l=0}^{\infty} x^l a_l(v), \quad Z(x,v) \sim \sum_{l=0}^{\infty} x^l b_l(v)$$

<u>が成り立つ，すなわち任意の自然数</u> N <u>に対して</u> v <u>に無関係に</u>

$$\left| Y(x,v) - \sum_{l=0}^{N-1} x^l a_l(v) \right| = O(x^N).$$

β) $(x, \Phi(x))$ <u>の値が不等式</u>

$$0 < |x| < \xi'', \quad \underline{\Theta} < \arg x < \overline{\Theta}, \quad |\Phi(x)| < b''$$

<u>を満足する限り，</u>

$$y = Y(x, \Phi(x)), \quad z = Z(x, \Phi(x))$$

<u>は方程式 (A) の解である．</u>

この定理が証明できれば最初の定理は次のようにして証明される．まず $Y(x,v)$, $Z(x,v)$ は $v=0$ において

て一価正則であるから，Cauchy の積分定理により

$$Y(x,v)=\sum_{q=0}^{\infty} v^{q}\,\overline{Y}_q(x),\quad Z(x,v)=\sum_{q=0}^{\infty} v^{q}\,\overline{Z}_q(x),$$

ここで

$$\overline{Y}_q(x)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|v|=b''}\frac{Y(x,v)}{v^{q+1}}\,dv\ .$$

$Y(x,v)$，$Z(x,v)$ は $(\mathcal{D})$ の閉包

$$\text{④}\leq \arg x \leq \text{⑤},\ 0\leq |x| \leq \xi'';\quad |v|\leq b''$$

において連続であると仮定してよい．一方，$a_\ell(v)$ は $v=0$ で一価正則であるから，Cauchy の積分定理により

$$P_{\ell q}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|v|=b''}\frac{a_\ell(v)}{v^{q+1}}\,dv\ .$$

ゆえに

$$\overline{Y}_q(x)-\sum_{\ell=0}^{N-1} x^{\ell} P_{\ell q}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|v|=b''}\frac{Y(x,v)-\sum_{\ell=0}^{N-1} x^{\ell} a_\ell(v)}{v^{q+1}}\,dv,$$

$Y(x,v)$ の x のベキ級数への漸近展開は v について一様であるから，この右辺の被積分関数の大きさは

$O(x^N)\cdot x^{-1-q}$ となる。ゆえに

$$\left|\bar{Y}_q(x)-\sum_{l=0}^{N-1}x^l P_{lq}\right|=O(|x|^N).$$

N は任意であったから，この不等式は漸近展開

$$\bar{Y}_q(x)\simeq\sum_{l=0}^{\infty}x^l P_{lq}$$

が成り立つことを示す。すなわち $\bar{Y}_q(x)$ の漸近展開と，$A_q(x)$ のそれとは一致する。

<u>4. ベクトル方程式への拡張</u>　方程式(A)に対する定理は，y および z がベクトルの場合に拡張される：

$$\text{(B)}\quad x\,1_m(x^\sigma)\,y'=f(x,y,z),\qquad xz'=g(x,y,z)$$

$$1_m(x^\sigma)=\mathrm{diag}\{x^{\sigma_1},x^{\sigma_2},\ldots,x^{\sigma_m}\}.$$

$\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_m$ はすべて正の整数；y は m 次，z は n 次のベクトル；f は m 次，g は n 次のベクトル関数で各成分は複素 x, y, z 平面の $m+n+1$ 次元複素空間の原点の近傍で一価正則かつ

$$f(0,0,0)=0,\qquad g(0,0,0)=0.$$

仮定Iの代りに

仮定1 関数行列式

$$\det\left(\frac{\partial f}{\partial y}(0,0,0)\right) \neq 0.$$

もしくは 行列 $(\partial f/\partial y(0,0,0))$ の固有値 $\nu_1, \ldots, \nu_m$ はすべて 零 と異なる.

この行列を $\mathfrak{a}$ とかけば, もし必要であれば変換

$$\begin{cases} y = Y - \mathfrak{a}^{-1} f_z(0) Z - \mathfrak{a}^{-1} f_x(0)\, x, \\ z = x^\sigma \mathfrak{a}^{-1} g_y(0) Y + Z \end{cases}$$

を行うことにより,

$$f_z(0,0,0) = 0, \quad f_x(0,0,0) = 0, \quad g_y(0,0,0) = 0$$

と仮定して一般性を失わない. 仮定IIに対応して

仮定2. 行列

$$\frac{\partial g}{\partial z}(0,0,0)$$

の固有値 $\mu_1, \ldots, \mu_n$ の実部はすべて正.

これらの仮定のもとに, 同じような定理が得られる. ただし $\Phi(x)$ は n 次のベクトルで その k 成分 $\Phi_k(x)$

$$\Phi_k(x) = x^{\mu_k}\{C_k + (C_1, \dots, C_{k-1}, \log x \text{ の多項式})\}.$$

とくに, $C_1 = \cdots = C_n = 0$ のとき, $\Phi(x) \equiv 0$ のときは,

$$y = \sum_{\ell} \Phi(x)^{\ell} A_{\ell}(x), \quad z = \sum_{\ell} \Phi(x)^{\ell} B_{\ell}(x)$$

の形に展開できる収束な解の存在がすでに証明されている。展開式の有効な範囲は

$$\theta' < \arg x < \theta'', \quad 0 < |x| < \xi'', \quad \|\Phi(x)\| < b''$$

の形であらわされる。ただし $\| \ \|$ は maximum norm, $\theta' < \arg x < \theta''$ は, すべての番号 j にたいして

$$\left|\arg(-\gamma_j) - \sigma_j \arg x\right| < \frac{3\pi}{2} - \varepsilon'$$

$\varepsilon' > 0$ 十分小

が同時になりたつような最大の角領域。しかもこの角領域のなかに, $x \to 0$ のとき指数関数

$$\exp\left(\mathrm{Re}\,\frac{\gamma_j}{\sigma_j x^{\sigma_j}}\right)$$

が ∞ となるような x の方向が含まれていることを仮定しなければならない。